尽管数学家在开发数学的新领域时可以定义和研究他们选择的任何对象,但是中表面的“自然”概念需要相当复杂的定义(定义3.1.1).定义以及微分流形的定义对于将微积分和几何学适当地泛化为非欧几里得空间是必要的.

另一方面,可以通过不扩展约束条件而是通过扩展上下文来泛化来自几何学和微积分的许多概念.我们定义了这些概念.本附录首先介绍的内容是度量空间,即一个带有距离概念的集合.欧几里德几何学中的许多概念(包括连续性)对度量空间都有自然的概括.在拓扑空间的更一般的上下文中,出现了许多有用的分析概念,例如连续性,序列限制或连通性,而不是距离函数,我们有一个更松散的近似符号.

尽管拓扑是数学的一大分支,但本附录仅介绍了支持本书介绍微分几何的基本概念.读者可能会在典型的分析课程中遇到许多这些概念.我们请读者参考[27]来温和而透彻地介绍点集拓扑,并参考[43]和[2]来介绍包括同源性,基团,代数拓扑和表面分类的拓扑.

A.1 度量空间

A.1.1 度量空间:定义 2020年11月10日12点32分

度量空间是在两点之间带有“距离”概念的集合,其中此距离函数涉及一些模拟欧几里得空间中的几何形状的数值条件.

定义A.1.1 令X为任意集合.上的度量是函数使得

等价性:当且仅当;

对称性:对所有成立;

三角不等式:对所有成立.

其中是具有度量的集合的对称为度量空间.

定义A.1.5 令为度量空间,令为一个点.我们将以p为中心,半径为r的开球定义为

上面,我们介绍了在任意度量空间中打开球的概念.尽管本附录引入了主要支持点集拓扑概述的概念,但两点之间的距离概念使我们能够将理论从几何学推广到任何度量空间.我们在下面列出了其中一些概念,它们存在于任何度量空间中,但不会进一步推广到拓扑空间.

有时间再编写.

A.1.2 开集和闭集 2020年11月10日15点27分

在实函数的研究中,我们经常使用开区间和闭区间的概念.在这种情况下,我们简单地说,如果有界区间不包含端点,则该区间是开的;如果两个端点都包含,则该区间是闭合的.对于无界间隔给出了类似的定义.然后,如果R的子集是开放的仅当它是开区间的不相交联合.相反,在Rn或度量空间中,鉴于集合形状的可能性范围很广，尽管我们可以尝试理解\包括边界点的概念，但我们无法合理地谈论端点。” 对于开放性和封闭性需要不同的定义.

定义A.1.8 令为度量空间.如果对所有都存在使得开球,则子集称为开集.子集被称为闭集仅当其补集是开放的.

直观上,该定义指出,如果度量空间的一个子集U在每个点周围都有一个完全包含在U中的开球(可能半径较小),则称该空间为U.请注意,我们可能希望考虑多个度量同时在同一集合X上.在这种情况下,我们将参考D开集合.

命题A.1.9 令为度量空间.则

X和; 都是开放的;

任何两个开集的交集是开放的;

任何开放集集合的并集都是开放的.

使用命题A.1.9（2），很容易证明有限个开放集的任何交集都再次开放。 相反，第3部分指出X的任何开放子集的并集再次都是开放的，无论该集合是否有限。 开放集的并集和交集之间的这种差异不是该命题的不足，而是度量空间中开放集的基本方面。 实际上，如下面的简单示例所示，开放集的无限交集不必是开放的.

定义A.1.13 令为度量空间中的一个点.的**开放邻域**(或简称为**邻域**)是包含的的任何开放集合.

命题A.1.14 令为度量空间.则

X和; 都关闭了;

任何两个闭集的并集是封闭的;

封闭集合的任何集合的交集都是封闭的.

命题A.1.15 令为度量空间,令.则单例集是的封闭子集.

命题A.1.16 令为度量空间.子集F是闭集当且仅当意味着.

定义A.1.17 令为度量空间,令为任何子集.将A的**闭包[closure]**定义为

命题A.1.18 令为度量空间,并且为的任何子集.为包含的最小闭合集.换句话说,

A.1.3 序列 2020年11月10日17点33分

在标准微积分课程中,将介绍实数序列的概念以及收敛和极限的问题.在这些课程中,当我们说一个序列收敛到某个极限时,给出的定义使序列中所有项的概念形式化,最终任意接近极限点.因此,由于极限形式化了关于距离和距离的概念,因此收敛和极限的自然且最一般的上下文是度量空间.

定义A.1.19 令为度量空间,令为中的序列.序列被称为收敛到极值仅当对于所有存在使得如果,则(即,).如果收敛到,则我们写

命题A.1.22 令为度量空间.任何序列最多可以收敛到一个极限点.

定义A.1.23 令为度量空间,令为中的序列.点被称为的**积点[accumulation point]**仅当对于所有实数,使得无穷个元素包含在中.的积点集合是所有积点的集合.

A.1.4 连续性 2020年11月10日18点10分

出于与序列收敛相同的原因，连续性的概念自然而然地推广到度量空间的类别，而连续性概念首先在实函数的范围内引入.下面是定义.

定义A.1.25 令和为两个度量空间.函数在点处被称为是**连续的**仅当对所有的,存在使得意味着.函数被称为连续的仅当它在所有点处都是连续的.

命题A.1.28 令和为度量空间.令和是函数,并且使得在点处连续,在处连续.则复合函数在处连续.

命题A.1.29 令和为两个度量空间,令是一个函数.函数是连续的当且仅当对于所有开放子集,集合

是的一个开子集.

命题A.1.30 令和为两个度量空间,令是一个函数.函数是连续的当且仅当对于Y中所有开球,集合是X的一个开子集.

A.2 拓扑空间 2020年11月10日18点56分

A.2.1 定义和例子 2020年11月10日18点56分

定义A.2.1 **拓扑空间**是一个对,其中是一个集合,是满足以下条件的子集集合:

1. 和在中.
2. 对于中的所有和,.
3. 对于中集合的任何组合,并集在中.

中的元素被称为X的开子集并且一个子集被称为闭集仅当是开集,即.

作为替代术语，我们将讨论满足以上三个属性的τ作为X上的拓扑。在本附录的简介中，我们承诺拓扑将尝试提供一种概括邻近性概念的思维模型.以下概念是这种思维方式的关键.

定义A.2.2 令为拓扑空间,令.任何使得被称为的**邻域**.

如果我们在同一个集合X上使用多个拓扑,则将引用τ-open和τ-closed子集以避免歧义.

与度量空间中开集的性质一样,在定义A.2.1的准则(3)中,索引集不必是可数的,因此,我们不应假定集合可以表示为子集序列.

定义A.2.8 令为拓扑空间.开集的集合被称为拓扑的基仅当每一个开集是元素的并集.

命题A.2.9 令为拓扑空间,并假定是基.则:

的元素覆盖X;

如果,那么对于所有都存在使得.

反过来,如果开集的任意组合都满足上述两个属性,则在上存在一个唯一的拓扑,使得是它的基.(该拓扑被称为由生成.)

**命题A.2.12** 令为拓扑空间.那么关于的闭集,以下是正确的:

1. 和是闭集.(**这一条可能存在错误**)
2. 任何两个闭集的并集是闭集.(**证明过程存在符号错误**)
3. 闭集的任何组合的交集都是闭集.

**命题A.2.13** 令为集合.假设子集的组合满足以下属性:

1. 和在中.
2. 中任意两个集合的并集再次位于中.
3. 中任意集合的交集都在中.

则,中集合的所有补集的集合在上形成拓扑.

**定义A.2.16** 令为一个集合,令和为的两个拓扑.如果,则说比**精细**,而比**粗糙**. 如果,我们说比**严格精细**,并且比**严格粗糙**.

**定义A.2.17** 令为拓扑空间,为的子集.我们定义

A的**闭包**,写为，作为中包含的所有闭集的交集;

A的**内部[interior]**,写为,作为中包含的所有的开集的并集;

A的**边界[frontier]**,写为,作为所有的集合,使得对于的每个邻域都平凡地与和相交,即和.

**命题A.2.18** 令为拓扑空间,令为的任何子集.则集合A是封闭的当且仅当.

**定义A.2.19** 令为拓扑空间的任何子集.的极限点是任意点使得对于的每个开放邻域U.

**命题A.2.20** 令为拓扑空间的子集.集合A是封闭的当且仅当集合A包含其所有极限点.

**定义A.2.21** 令为拓扑空间.的子集在中称为**密集的[dense]**仅当.

**命题A.2.23** 有理数的集合在R中是密集的.

**定义A.2.24** 拓扑空间被称为**第二可数**仅当存在可数的基.

**A.2.2 连续性** 2020年11月11日11点21分

**定义A.2.26** 令和为两个拓扑空间,令是一个函数.我们称是**连续的**(相对于和)仅当对于每一个开集,集合在X上开集.

**定义A.2.28** 令与前面的定义相同.我们称在处连续,仅当对于的每个邻域,存在一个的邻域,使得.

**命题A.2.29** 令和为拓扑空间,令是一个函数.则是连续的当且仅当在所有上连续.

**命题A.2.30** 令和为三个拓扑空间.如果和是连续函数,则也是一个连续函数.

对于度量空间,连续函数是保留点“邻近”的函数.尽管拓扑空间不一定是度量空间,但拓扑空间之间的连续函数保留了邻近性,即如果两个图像和在同一个开集V中,那么存在一个捅死包含和的开放集合,使得.

在集合论中,如果存在 它们之间存在双射：除了我们如何标记特定元素外，它们是相同的。 对于要被视为“相同”的拓扑空间，“不仅底层集合需要在双射中，而且此双射还必须保留拓扑。这是同胚的概念.

**定义A.2.31** 令和为两个拓扑空间,令是一个函数.函数被称为**同胚[homeomorphism]**仅当

1. 是双射;
2. 是连续的;
3. 是连续的.

如果两个拓扑空间之间存在同胚,则称它们为**同胚的[homeomorphic]**.

**定理A.2.37** 欧氏空间和是同胚的当且仅当.

该定理指出,欧几里得空间只有在维数相同的情况下才能是同胚的.对于不经意的读者来说,这似乎很明显,但是这个事实隐藏了许多微妙之处.首先,拓扑中集合维的概念根本不是一个简单的概念.其次,我们必须谨慎考虑空间填充曲线,例如Peano曲线,该曲线是封闭区间[0; 1]到封闭的单位正方形[0; 1]×[0; 1]。（有关构造，请参见[28]，第3-3节。）可以对空间填充曲线的构造进行一般化，以找到在Rm上的连续叠加，即使n <m。 但是，定理A.2.37暗示没有空间填充曲线是双射的，并且没有连续的逆.不同维数的欧几里得空间不是同胚的,这意味着它们在拓扑结构上是不同的.

**A.2.3 导出拓扑空间** 2020年11月11日11点51分

给定任何拓扑空间,有多种方法可以创建新的拓扑空间.我们介绍了两种常用的方法——子集拓扑和商空间——贯穿本书使用.

**定义A.2.38** 令为拓扑空间,令为的任何子集.我们称一个子集是开集当且仅当存在的开子集使得,并在S上定义**子集拓扑**.

**命题A.2.39** 令为拓扑空间,令.令为**包含[inclusion]函数**.S上的子集拓扑是最粗糙的拓扑使得是连续函数.

**定义A.2.41** 令为集合,令为X上的等价关系.的等价类的集合用表示,并称为由R得到的**商集[quotient set]**.

定义A.2.44 令为拓扑空间,令为的等价关系.定义是将中的元素发送到其等效类的函数;被称为**商映射**(有时也称为**粘合映射[identification map]**).我们将上的**商拓扑**(或**同化拓扑[identification topology]**)称为使连续的最佳拓扑.

命题A.2.45 令为拓扑空间,令为的等价关系,令f为商映射.上的商拓扑为

A.2.4 紧凑性 2020年11月11日12点03分

在任何微积分课程中，我们都会遇到极值定理，这是分析的结果，构成了Rolle定理，中值定理和微积分基本定理的重要组成部分.

定理A.2.49(极值定理) 令是一个连续的实值函数.则在区域内达到极大值和极小值.

定义A.2.50 令为拓扑空间.令是中开集的集合.我们称是的**开覆盖[open cover]**仅当

如果,则集合被称为的**子覆盖[subcover]**仅当本身是的开覆盖.

**定义A.2.51** 如果的每个开放覆盖都具有有限的子覆盖,则拓扑空间称为**紧凑[compact]**.

备注A.2.52 如果X的子集A在配备有由（X;τ）引起的子空间拓扑时是紧凑的，则称为紧凑。 这等效于以下属性：只要存在带有U⊂Si2I Ui的开放集的U = fUigi2I集合，就存在带有A⊂Si2J Uj的有限子集J⊂I。

**定理A.2.53(Heine-Borel)** 上封闭有界区间是紧凑的.

**命题A.2.54** 令为拓扑空间,令为的紧凑子集.则的每个闭子集都是紧凑的.

**定义A.2.55** 令为拓扑空间,给定中的任意两个点和,如果和分别存在开领域和使得,则称为**Hausdorff**.

**命题A.2.56** 如果是Hausdorff拓扑空间,则的每个紧凑子集都是封闭的.

**定理A.2.57** 令为的任何子集(配有欧几里得拓扑).集合是紧凑的当且仅当集合A是封闭且有界.

定理A.2.58 令是拓扑空间和之间的连续函数.如果是一个紧凑空间,则在中也是紧凑的.

推论A.2.59 令为一个紧凑的拓扑空间,令是的实值函数.则同时具有最大值和最小值.

推论A.2.60 令和为拓扑空间,令是映射到的连续函数.如果X是紧凑的,那么也是.

推论A.2.61 令为紧凑的拓扑空间.如果空间与同胚,则Y是紧凑的.

A.2.5 连通性 2020年11月11日12点27分

**定义A.2.62** 令是非空拓扑空间,每当时,其中和是开放且不相交的,如果或,则是**连通的[connected]**.

**定义A.2.63** 令是为非空拓扑空间.的**分隔**是非空开放子集对,使得和.如果有分隔,则我们说它是**非连通的[disconnected]**.

**命题A.2.64** 令为拓扑空间.子集Y是连接的当且仅当不存在一对开子集,使得和.

命题A.2.65 令为拓扑空间,令和为两个连通的子集,使得.则是一个连通子空间.

定理A.2.66 的任何具有子空间拓扑的区间都是连通的.

定义A.2.67 令为拓扑空间.如果U = X或（U; X − U）是X的间隔，则连通的开放子集U称为X的连通分量。

定义A.2.68。 如果对于任意两个点p，则拓扑空间（X;τ）称为路径连通； q 2 X，存在连续图γ：[0； 1]！ X使得γ（0）= p和γ（1）= q。

命题A.2.69。 如果拓扑空间是路径连接的，则它是连接的.